



מתמטיקה ככלי תכנוני – מְשֻׁחָקִים וכיצד המתמטיקה מסייעת לְנִצְחָה בהם

Eilon Solan*

בית הספר למדעי המתמטיקה, הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר, אוניברסיטת תל אביב

סוקרים צעירים

DAFNA

גיל: 9



ITAMAR

גיל: 10



מדי יום אנו מְבַצְעִים החלטות רבות שמשפיעות על הסובבים אותנו, ומושפעים מהחלטות שמקבלים אנשים אחרים. השפעה הדדית זו גורמת למצבים שבהם משתתף יותר מאדם אחד, הנקראים 'מְשֻׁחָקִים', להיות מאתגרים לניתוח. כך, כאשר אני משתתף במשחק, עליי לנחש מה משתתפים אחרים יעשו, כדי שאוכל לבחור בדרך פעולה מיטבית להתמודדות עם החלטותיהם. המשתתפים האחרים יודעים שאני מנחש מה הם יעשו, ומנסה להתאים את פעולתי לניחוש זה, ולכן יִשְׁנוּ את מהלכיהם בהתאם לניחוש שלהם לגבי המהלך שלי. תכונה זו נקראת "מְעַגְלִיית". האם ניתן לפתור את המעגליות בניתוח המשחק? האם התחום המתמטי שנקרא 'תורת המְשֻׁחָקִים' יכול להמליץ לשחקנים כיצד לשחק כדי להשיג את מטרתם? במאמר זה נציג את מושג 'שיווי המשקל', שמסייע לענות על שאלות אלה.

מהו משחק?

כשאנו שומעים את המילה **משחק**, אנו חושבים על כדורגל, מונופול, שחמט או משחקי מחשב. שתי תכונות המשותפות לשלושת המשחקים הראשונים, וכן לחלק ממשחקי המחשב הן:

- במשחק משתתף יותר מאדם אחד.
- ההחלטות של כל שחקן משפיעות על השחקנים האחרים.

בתחום **תורת המשחקים**, כל סיטואציה המקיימת את שתי התכונות הללו נקראת 'משחק'. לפי הגדרה זו, אנו משחקים לאורך כל היום: ביחסינו עם בני משפחותינו; ביחסינו עם חברינו לכיתה ועם המורים שלנו, וכמובן, המשחקים ה"אמיתיים" שאנו משחקים – כל אלה הם משחקים. מבין משחקי המחשב, רק אלה המְעֲרְבִים יותר משחקן אחד מְכַרְיִם כמשחקים עבור תורת המשחקים. לכן, פורטנייט, Call of Duty ו-League of Legends הם משחקים גם עבור תורת המשחקים, בעוד ש-Witcher ו-God of War, שבהם אנו משחקים לבד, אינם משחקים עבור תורת המשחקים.

המשחקים שהזכרנו בפסקה הקודמת הינם מורכבים – נמשכים זמן רב, וכל שחקן מקבל לאורכם החלטות רבות. כדי שנוכל להבין כיצד מנתחים משחקים, נבחן משחק פשוט לדוגמה – משחק הרועים.

משחק הרועים

בכפר מסוים מתגוררים חמישה רועים, שלכל אחד מהם עדר כבשים. בצוהרי היום הכבשים צמאות, וכל רועה מוליך אותן לאחת משתי הַבְּאֵרוֹת בכפר: הבאר הצפונית או הבאר הדרומית. כל באר מכוסה אבן כבדה למניעת חדירה של חול ולכלוך למים. כדי להוריד את האבן מפי הבאר דרושים חמישה אנשים. לאיזו באר יוליך כל רועה את העדר שלו?

המצב שתיארנו הוא משחק; משתתפים בו חמישה שחקנים – חמשת הרועים, ועל כל שחקן לקבל החלטה – ללכת לבאר הצפונית או הדרומית. אם כל השחקנים יובילו את עדריהם לאותה באר, הם יצליחו להוריד את האבן המכסה אותה ויוכלו להרוות את צמאונן של הכבשים. אם לא ילכו לאותה באר – הכבשים תישארנה צמאות.

כיצד על הרועים לנהוג במשחק? ברור כי כדי להשקות את הכבשים, על כולם לבחור באותה באר. תובנה זו מובילה אותנו למושג חשוב בתורת המשחקים – שיווי המשקל.

התנהגות של השחקנים במשחק נקראת **שיווי משקל** אם לאף שחקן לא כדאי להיות היחיד שמשנה את התנהגותו, שְׁכֵן היא או הוא לא ירוויחו משינוי כזה [1].

במשחק הרועים, שיווי משקל אחד הוא זה שבו כל הרועים נפגשים בבאר הצפונית. אם כולם ינהגו כך, הם יוכלו להוריד יחד את האבן המכסה את הבאר ולהשקות את הכבשים.

משחק (Game)

מצב שבו משתתף יותר מאדם אחד המבצע החלטה, וההחלטות של כל שחקן משפיעות על השחקנים האחרים.

תורת המשחקים (Game theory)

תחום מתמטי העוסק בבחירה בדרך הפעולה המיטבית במצבים מחיי היומיום שבהם לכל שחקן העדפות שונות על התוצאה. תורה זו משמשת כלי לקבלת החלטות במגוון תחומים – מדיני, כלכלי ועוד.

שיווי משקל (Game balance)

התנהגות של השחקנים במשחק נקראת 'שיווי משקל' אם לאף שחקן לא כדאי להיות היחיד שמשנה את התנהגותו, שְׁכֵן היא או הוא לא ירוויחו משינוי כזה.

אם אחד הרועים ישנה את בחירתו וילך לבאר הדרומית, הוא ימצא את עצמו נשם לבדו, לא יוכל להוריד את האבן שמכסה את הבאר, ובפרט לא יוכל להשקות את כבשיו.

שיווי משקל נשני במשחק הרועים הוא זה שבו כל הרועים נפגשים בבאר הדרומית.

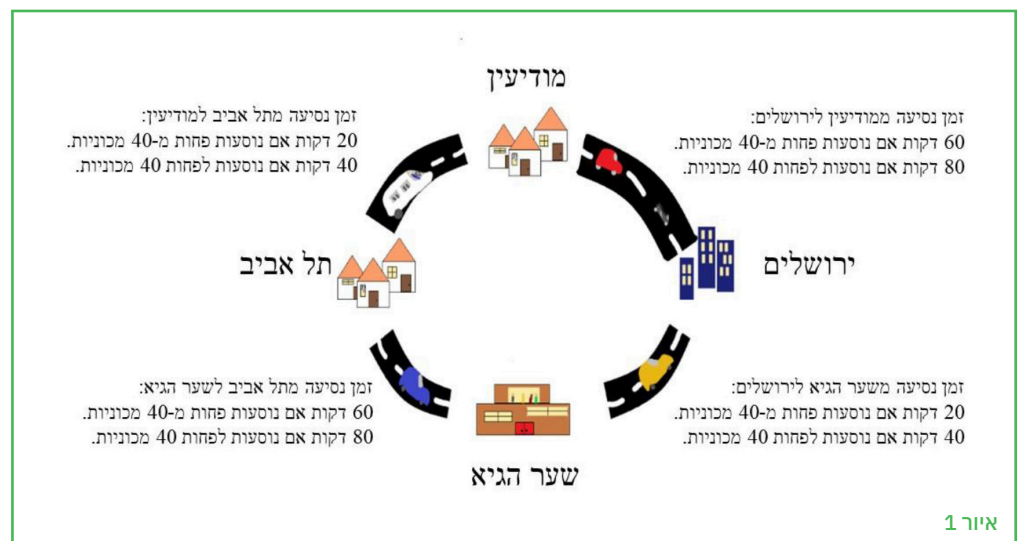
במשחק הרועים ישנם שיווי משקל נוספים, למשל, רועים 1, 2 ו-3 הולכים לבאר הצפונית, ורועים 4 ו-5 הולכים לבאר הדרומית. במקרה זה, באף באר אין חמישה אנשים, ולכן אף רועה לא יצליח להשקות את כבשיו. גם אם אחד הרועים ישנה את התנהגותו וילך לבאר השנייה, עדיין לא ימצאו חמישה אנשים באותה באר, ולכן הרועה עדיין לא יצליח להשקות את כבשיו. כלומר, שינוי ההתנהגות של שחקן אחד לא ישנה את התוצאה, ומכאן ההתנהגות שתיארנו בפסקה זו אף היא שיווי משקל. בעוד ששני שיווי המשקל הראשונים שתיארנו הם "טובים", היות שבהם הכבשים מרוות את צמאונן, שיווי המשקל השלישי הוא "רע", הואיל ובו הכבשים נותרות צמאות.

פרדוקס בָּרָס

מושג שיווי המשקל אֶפְשֵׁר למתמטיקאי הגרמני דִּיטְרִיךְ בָּרָס להסביר תופעה מעניינת בתחום התחבורה. כדי לתאר את התופעה, נסתכל על מערכת הכבישים המתוארת באיור 1. בין תל אביב לירושלים מחברים שני כבישים – כביש צפוני שעובר דרך מודיעין, וכביש דרומי שעובר דרך שער הגיא. זמן הנסיעה בכל קטע כביש תלוי במספר המכוניות הנוסעות בדקה נתונה באותו כביש. כך, למשל, זמן הנסיעה מתל אביב למודיעין הוא 20 דקות אם בכביש נוסעות פחות מ-40 מכוניות, וזמן הנסיעה ממודיעין לירושלים הוא 60 דקות אם בכביש נוסעות פחות מ-40 מכוניות. בכל קטע כביש שבו נוסעות לפחות 40 מכוניות, זמן הנסיעה מתארך ב-20 דקות. למשל, אם בכביש הצפוני נוסעות 30 מכוניות לדקה, זמן הנסיעה הכולל מתל אביב לירושלים הוא 80 דקות, ואם נוסעות בכביש זה 60 מכוניות, זמן הנסיעה הכולל עומד על 120 דקות.

איור 1

שני המסלולים המחברים את תל אביב לירושלים, ומְשַׁךְ הנסיעה בכל קטע כביש כתלות במספר המכוניות הנוסעות בו. המסלול הצפוני דרך מודיעין, והמסלול הדרומי דרך שער הגיא. צייר: דור סולן.



כל נהג בוחר באיזה כביש לנסוע לירושלים, והמטרה שמנחה אותו היא למצער את מְשָׁךְ הנסיעה. נבחן סיטואציה שבה השכם בבוקר יוצאות 60 מכוניות לדקה מתל אביב לירושלים.

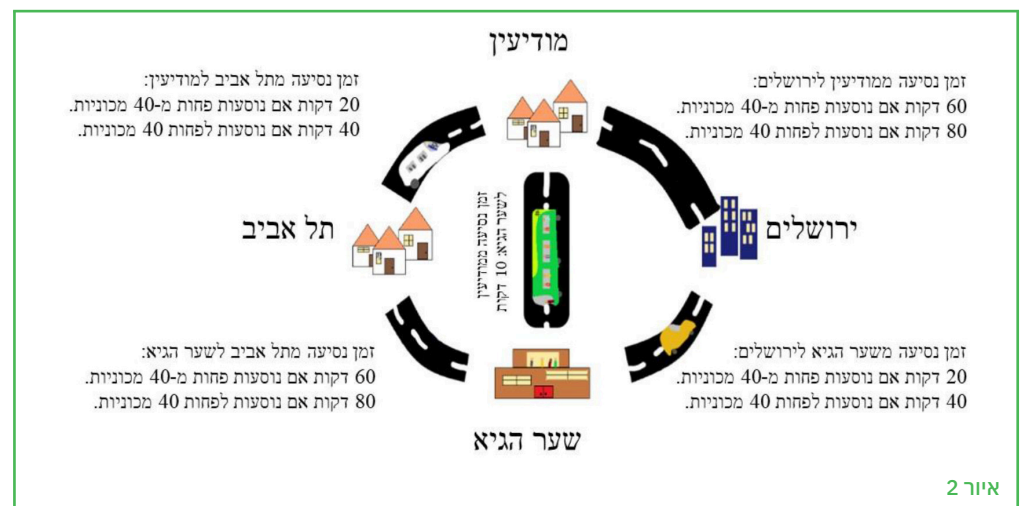
המצב שתיארנו הוא משחק; משתתפים בו 60 שחקנים – הנהגים היוצאים מתל אביב לירושלים, וההחלטה של כל שחקן היא התיב שבו ייסע לירושלים – המסלול הצפוני או המסלול הדרומי. כאמור, הנהגים מעוניינים למצער את זמן הנסיעה מנקודת המוצא אל היעד.

מהם שיווי המשקל במשחק? כל נהג ירצה לנסוע במסלול שבו משתמשים פחות מ-40 נהגים. למשל, שיווי משקל אחד הוא זה שבו במסלול הצפוני נוסעים 35 נהגים ובמסלול הדרומי 25 נהגים. שיווי משקל אחר הוא זה שבו במסלול הצפוני נוסעים 29 נהגים ובמסלול הדרומי 31 נהגים. בכל שיווי המשקל, זמן הנסיעה הכולל מתל אביב לירושלים הוא 80 דקות.

כחלק ממיזמי חברת 'חוצה ישראל' נסלל כביש ממודיעין לשער הגיא, שזמן הנסיעה בו עומד על 10 דקות (ראו איור 2). כביש זה הוא חד-סטרי, והתנועה בו היא ממודיעין לשער הגיא ולא בכיוון ההפוך. קל לראות כי שני שיווי המשקל שתיארנו קודם אינם עוד שיווי משקל לאחר הקמת הכביש החדש: זמן הנסיעה מתל אביב לירושלים במסלול הצפוני הוא 80 דקות. אך, אם נהג יבחר לנסוע מתל אביב למודיעין במסלול הצפוני (זמן הנסיעה 20 דקות), משם בכביש החדש לשער הגיא (זמן הנסיעה 10 דקות), ומשם לירושלים במסלול הדרומי [זמן הנסיעה 20 דקות, משום שכעת נוסעות בקטע כביש זה 26 מכוניות (בשיווי המשקל הראשון לעיל), או 32 מכוניות (בשיווי המשקל השני לעיל)] – הרי שזמן הנסיעה הכולל יהיה 50 דקות. כלומר, על ידי שימוש בכביש החדש הנהג יחסוך 30 דקות.

איור 2

רשת הכבישים לאחר סלילת הכביש החדש. צייר: דור סולן.



מסתבר כי שיווי המשקל לאחר הקמת הכביש החדש הוא כזה שבו כל הנהגים נוסעים מתל אביב למודיעין, משם בכביש החדש לשער הגיא, ומשם לירושלים (ראו תרשים 2). במצב דברים זה זמן הנסיעה הכולל עולה ל-90 דקות – בעשר דקות יותר מאשר לפני סלילת הכביש החדש. אם אחד הנהגים יבחר במסלול שונה, למשל, במסלול הצפוני, משך הנסיעה שלו יעלה ל-100 דקות (40 דקות מתל אביב למודיעין, ו-60 דקות ממודיעין לירושלים).

תוצאה זו מפתיעה כי למרות שהכביש החדש הוקם במטרה לווסת את עומסי התנועה, בפועל הוא גרם להתארכות משך הנסיעה מתל אביב לירושלים. הסיבה לכך היא שכיוון שהכביש החדש מהיר, נהגים ישתמשו בו כדי לקצר את זמן הנסיעה, אך באופן זה יעמיסו את כל המסלולים. כך, בעוד שלפני סלילת הכביש פחות מ-40 נהגים השתמשו בכל אחד משני המסלולים, הרי שלאחר סלילתו כל הנהגים משתמשים הן במסלול הצפוני הן במסלול הדרומי. אגב כך הם גורמים לעומסים ולפקקים בשני המסלולים, ובסך הכול משך הנסיעה מואץ.

מעניין לדעת כי התופעה שהצגנו כאן התרחשה במציאות. בשנת 1969 נבנה בעיר נְטוֹטְגֵרְט שבגרמניה כביש חדש שגרם להאטת התנועה לעיר. התנועה חזרה לקדמותה רק כשהכביש נסגר. במקרה אחר שאירע בניו יורק, סגרו רשויות העיר בשנת 2009 כמה קטעי כביש, וגילו שהדבר הוביל לשיפור בפקקי התנועה. עקב כך הסבו את קטעי הכביש האלה למדרחובים.

סיכום

מושג שיווי המשקל פותר את הִמְעָגְלִיּוֹת בניתוח משחקים. כאשר התנהגות השחקנים היא שיווי משקל, לאף אחד מהם לא כדאי לשנות את התנהגותו, ולכן התנהגות שיווי המשקל יציבה. מושג שיווי המשקל משמש כבסיס לכלכלה המודרנית, שבה מניחים כי כל אדם באוכלוסייה מנסה להגדיל את רמת האושר שלו. כמו כן מושג זה מהווה אבן יסוד בתחום הרשתות במדעי המחשב, שבו מניחים כי כל משתמש ברשת מנסה לשלוח מידע ולקבל מידע מהר ככל האפשר. ניתוח של משחקים ומציאת שיווי המשקל שלהם מאפשרים לשחקנים לִצְפּוֹת מה יקרה במשחק, להבין מה כדאי להם לעשות ולתכנן את צעדיהם הבאים.

לקריאה נוספת

1. תורת המשחקים, מאת דיקסיט וניילבאף, 2006, ספרי עליית הגג.
2. חשיבה אסטרטגית: תורת המשחקים ושימושיה בכלכלה וניהול, מאת אביעד חפץ, 2014, האוניברסיטה הפתוחה.
3. שיחות על תורת המשחקים, מאת חיים שפירא, 2008, כנרת זמורה ביתן.

מקור

1. Nash, J. F. Jr. 1950. Equilibrium points in n-person games. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 36:48–9.

עורך: Idan Segev

מנחה מדעי: Yonatan Kra

ציטוט: Solon E (2022) מתמטיקה ככלי תכנוני – משחקים וכיצד המתמטיקה מסייעת לנצח בהם. *Front. Young Minds.* doi: 10.3389/frym.2022.932214-he

מעגליות (Circularity)

בהקשר תורת המשחקים – חשיבה בו-זמנית שמפעילים שחקנים בניסיון להתחקות אחר מהלכי יריביהם. חשיבה זו מובילה לשינוי מהלכי השחקנים בהתאם לניחוש לגבי המהלכים הצפויים של שחקנים אחרים.

תורגם והותאם מ: Solan E (2022) Games and How Math Can Help Us Win Them. Front. Young Minds 10:932214. doi: 10.3389/frym.2022.932214

הצהרת ניגוד אינטרסים: המחברים מצהירים כי המחקר נערך בהעדר כל קשר מסחרי או פיננסי שיכול להתפרש כניגוד אינטרסים פוטנציאלי.

COPYRIGHT © 2022 © Solan 2022. זהו מאמר בגישה פתוחה שמופץ תחת תנאי רישיון [Creative Commons Attribution License \(CC BY\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). השימוש, ההפצה או ההעתקה מותרים לשימוש בפורומים אחרים ובלבד שיינתן קרדיט למחבר(ים) המקוריים ולבעל זכויות היוצרים, ושהפרסום המקורי בעיתון זה מצוטט בהתאם למקובל באקדמיה. השימוש, ההפצה או ההעתקה אינם מותרים אם הם אינם עומדים בתנאים אלה.

סוקרים צעירים

DAFNA, גיל: 9

אני גרה במודיעין, לומדת בכיתה ג ופעילה בצופים. אוהבת לצייר, לִפְסֵל ולכתוב סיפורים. אני גם נהנית להדריך, קוראת הרבה ומתאמנת בג'ודו. יש לי הרבה רעיונות ליוזמות חדשות, ובימים אלה אני עסוקה בכתיבת עיתון כיתתי ובמקזזר בקבוקים.

ITAMAR, גיל: 10

אני גר במודיעין ולומד בכיתה ה. מתאמן בג'ודו כבר כמה שנים, ומתעניין בסוגים שונים של מכונות. אני נהנה לרכוב על אופניים עם חברים, לבד וגם כשאבא רץ לידי. אוהב לתכנת ומשתתף בתחרויות תכנות ורובוטיקה. אני נהנה לצאת לטיולים בטבע, אבל גם להסתכל על הגשם בחוף בעודי בבית החם. אוהב לקרוא הרבה ספרים, במיוחד את סדרת הארי פוטר.

הכותב

EILON SOLAN

אילון סולן הוא פרופסור למתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, ומומחה לתורת המשחקים. בתחום הכתיבה הוא מְחַבֵּר של ספר לימוד בתורת המשחקים, ושל ספר מדע בדיוני בשם "הקיסר הבא". היה חבר בהנהגת השבט שניצח בעולם 1 בַּשָּׂרָת הישראלי של המשחק 'שבטי מלחמה' (TribalWars).

*eilons@tauex.tau.ac.il

מוזיאון המדע ע"ש בלומפילד ירושלים
متحف العلوم على اسم بلومفيلد القدس
Bloomfield Science Museum Jerusalem



הוצאת פרונטירז מדע לצעירים ישראל
Hebrew version provided by



THE SAGOL NETWORK